

L8

## Asimilace dat II

Oddělení numerické předpovědi počasí

© ČHMÚ 2007

# Plán přednášky

- Úvod do analýzy
- Optimální odhad v meteorologii
  - 1D případ: demonstrace metod;
  - multi-dimensionální případ;
  - Zavedení předběžného pole;
  - Strukturní funkce;
  - 4D analýza;
- Historický vývoj analýzy

# Úvod do analýzy

- Problém počáteční podmínky v meteorologii:
  - Znat co nejpřesněji současný stav atmosféry.
- Analýza: pravidelná prostorová reprezentace prognostických proměnných v daném čase.
  - Slouží jako diagnostika;
  - Je startem pro novou předpověď;
  - Hodí se pro pozdější validaci.
- Analýza potřebuje:
  - Systém pozorování;
  - “diagnostickou funkci”, kde musí být zahrnuty vnitřní vztahy mezi závislými proměnnými;
  - Prognostickou komponentu pro vytvoření prvního odhadu.

# Analýza: optimální odhad v meteorologii

- Použijeme teorii odhadu s následujícími klíčovými hypotézami:
  - Pozorování nejsou perfektní;
  - Odhad (analýza) také nebude perfektní;
  - Odhad by měl být optimální kombinací pozorování, minulých a současných;
  - Model může poskytnout první odhad;
  - Model není nikdy perfektní;
  - Odhad by měl souhlasit s pozorováními v intervalu jejich chyby.

# Zjednodušení problému odhadu

Odhadněme **proměnnou**  $x$  ze dvou **měření**:  $y_1, y_2$

$$y_1 = x^t + \varepsilon_1; y_2 = x^t + \varepsilon_2$$

$x^t$  -“pravda”, jež chceme odhadnout;  $\varepsilon$  - **chyba pozorování**. Máme následující hypotézy:

Přístroje jsou bez **biasu**:  $E(\varepsilon_1) = E(\varepsilon_2) = 0$

Jejich **přesnost je známa**:  $E(\varepsilon_1^2) = \sigma_1^2; E(\varepsilon_2^2) = \sigma_2^2$

Jejich **chyby nejsou korelovány**:  $E(\varepsilon_1 \varepsilon_2) = 0$

Odhad (analýza) může být nalezena 3 přístupy:

- Minimalizací variance chyby odhadu;
- Metodou vážených nejmenších čtverců;
- Maximální pravděpodobností.

# Minimalizace variance chyby odhadu: jednoduchý případ (1)

Hledáme odhad  $x^a$  jako lineární kombinaci pozorování:

$$x^a = k_1 y_1 + k_2 y_2 \quad \text{Váhy } k \text{ jsou neznámé. Chceme aby odhad neměl systematickou chybu: } E(x^a - x^t) = 0$$

Tak máme:

$$E(k_1 y_1 + k_2 y_2 - x^t) = k_1 E(x^t + \varepsilon_1) + k_2 E(x^t + \varepsilon_2) - E(x^t) = (k_1 + k_2 - 1)E(x^t) = 0 \quad \text{Součet vah je jednička.}$$

Chceme aby **odhadnutá chyba byla minimální**:  $\sigma_a^2 = E((x^a - x^t)^2)$   
a s použitím:

$$x^a = k_1 y_1 + (1 - k_1) y_2; E(\varepsilon_1 \varepsilon_2) = 0$$

máme: 
$$\sigma_a^2 = k_1^2 \sigma_1^2 + (1 - k_1)^2 \sigma_2^2$$

# Minimalizace variance chyby odhadu: jednoduchý případ (2)

Minimalizace chyby poskytne vztah pro váhy:

$$k_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \text{ and } k_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

přesnost odhadu je dána obrácenou hodnotou variance chyby:

$$\frac{1}{\sigma_a^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}; \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sigma_a^2} = \sum_{i=1}^p \frac{1}{\sigma_i^2}$$

Čím více pozorování, tím větší přesnost.

# Nejmenší čtverce s vahami: jednoduchý případ

Odhad může být hledán **minimalizací jeho vzdálenosti od pozorování**, když vezmeme v úvahu jejich **přesnost  $1/\sigma^2$** :

$$J(x) = \frac{1}{2} \frac{(x^a - y_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{1}{2} \frac{(x^a - y_2)^2}{\sigma_2^2}$$

Budeme počítat minimum  $J(x)$ :

$$\frac{\partial J(x^a)}{\partial x^a} = \frac{x^a - y_1}{\sigma_1^2} + \frac{x^a - y_2}{\sigma_2^2} = 0$$

$$x^a = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} y_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} y_2$$

A dostaneme ten samý výraz jako u předešlé metody.



# Multidimenzionální případ (1)

Budeme mít **stavový vektor**  $\mathbf{x}$ , s dimenzí  $\mathbf{n}$ . Jeho složky jsou například hodnoty v uzlovém bodě výpočetní mřížky (3D), jsou to hodnoty různých prvků (teplota, vítr, tlak, ...).

Zavedeme také **vektor of pozorování**  $\mathbf{y}$  s dimenzí  $\mathbf{p}$ . Můžeme jej zapsat takto:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}(\mathbf{x}^t) + \boldsymbol{\varepsilon}_H + \boldsymbol{\varepsilon}_O$$

$\mathbf{H}$  je vztah mezi analyzovanými proměnnými a pozorováními.

Je nazýván jako “**observation operator**”. Když je **lineární**, je to matice  $\mathbf{n} \times \mathbf{p}$ .

$\boldsymbol{\varepsilon}_H$  je **chyba reprezentativity**.

$\mathbf{H}$  může být roven jednotkové matici (nejjednodušší případ) nebo zahrnovat **prostorové interpolace** (z modelové mřížky do bodu pozorování), **relaci mezi proměnnými modelu a měřenou veličinou** (satelitní radiance), nebo dokonce **integraci modelu** (4DVAR). Často jsou tyto poslední dva vztahy **linearizovány**

# Multidimenzionální případ (2)

Jako v předchozím případě, hledáme **odhad prostý systematické chyby**. Použijeme metodu nejmenších čtverců s vahami. Zavedeme **matici variancí-covariancí chyb pozorování**:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \sigma_2^2 & E(\sigma_2\sigma_3) & \cdot \\ \cdot & \cdot & \sigma_3^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_4^2 \end{pmatrix}$$

Obecně mohou být korelovány

Budeme hledat minimum následující kvadratické formy:

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

# Multidimenzionální případ (3)

Derivace kvadratické formy je:

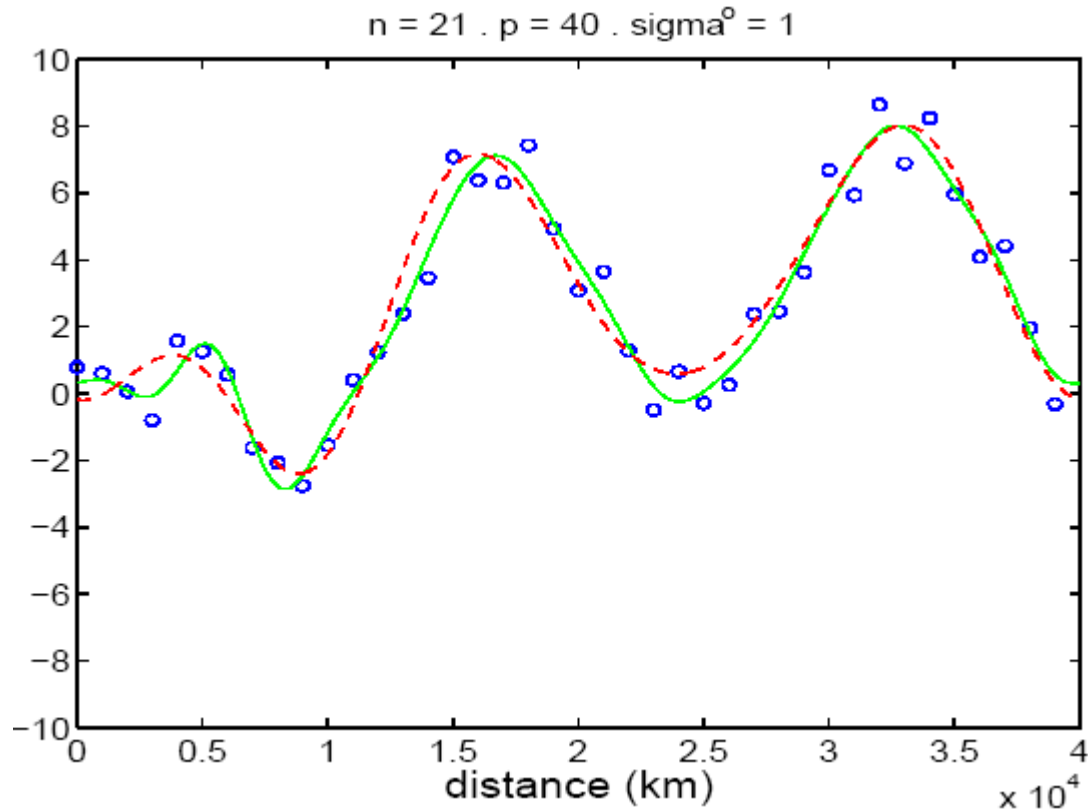
$$\nabla J(\mathbf{x}) = \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Je to **vektor gradientu**; jeho složky jsou gradienty  $J$  podle složek stavového vektoru  $\mathbf{x}$ . Analýza je „Best Linear Unbiased Estimate“ (“BLUE”):

$$\mathbf{x}^a = (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}$$

ten samý výsledek bychom získali pomocí metody **miminalizace variance chyby** nebo metodou **maximální věrohodnosti** (za předpokladu Gaussovské PDF pro chyby pozorování).

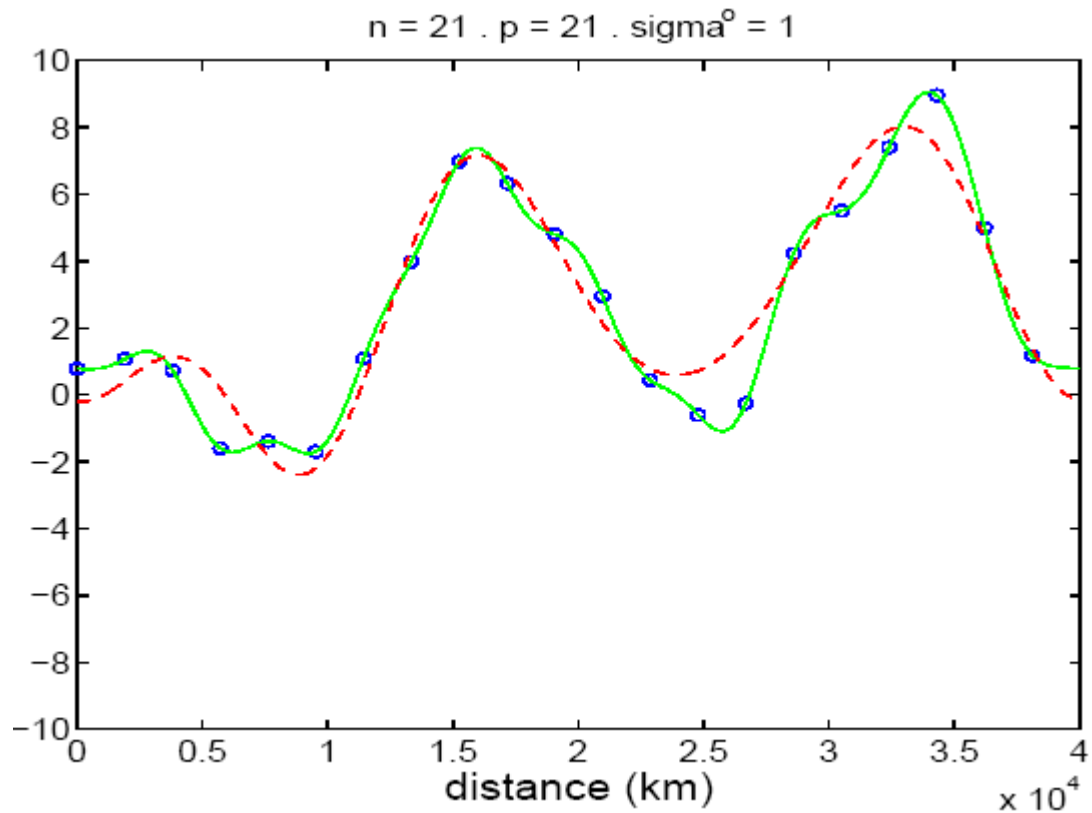
# Potřeba přeurčení systému: zavedení předběžného pole (1)



Pravda- červeně  
Obs – kolečka  
Analýza-zeleně

Případ přeurčení:  $n=21$ ,  $p=40$ .

# Potřeba přeurčení systému: zavedení předběžného pole (2)



Pravda- červeně  
Obs – kolečka  
Analýza-zeleně

Nemáme přeurčení:  $n=21$ ,  $p=21$ . Přitom by bylo žádoucí.

# Potřeba přeurčení systému: zavedení předběžného pole (3)

Abychom systém přeurčili, použijeme předběžné pole („guess“, „background“):  
Je to první odhad stavového vektoru, označený jako  $\mathbf{x}^b$ . Má tu samou dimenzi  
Jako analýza  $\mathbf{x}^a$  a používáme jej jako druhý zdroj informace.  
Můžeme pak psát (Talagrand):

$$\mathbf{x}^b = \mathbf{x}^t + \boldsymbol{\varepsilon}^b$$

Všimněme si stejného formalismu jako pro pozorování;  $\boldsymbol{\varepsilon}^b$  je chyba předběžného pole a operátor  $\mathbf{H}$  je zde redukován na jednotkovou matici  $\mathbf{I}$ .  
Použijeme hypotézu, že chyba předběžného pole nemá bias (není systematická).  
Zavedeme matici  $\mathbf{B}$  covariancí chyb předběžného pole analogicky k matici  $\mathbf{R}$  pro pozorování. Předpokládáme, že  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{R}$  nejsou korelovány.  
První odhad (guess) je typicky poskytnut předešlou krátkou modelovou předpovědí.

# Potřeba přeurčení systému: zavedení předběžného pole (4)

Metoda nejmenších čtverců vyžaduje najít minimum kvadratické formy:

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^b)^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) + \frac{1}{2} (\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Tento **skalární funkcionál měří vzdálenost k dostupné informaci.**

Jeho gradient je:  $\nabla J(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y})$

Řešením je  $\mathbf{x}^a = (\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{x}^b + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y})$   
“BLUE” odhad

Alternativně:  $\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^b = \mathbf{B}\mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}^b)$

 Matice zisku „gain“

 Inovační vektor

# Role matice **B** - strukturní funkce (1)

Matice **B** popisuje variance a kovariance chyb předběžného pole.

V multidimenzionálním systému má **B** variance chyb na své diagonále a kovariance chyb jsou členy mimo diagonálu.

Kovariance chyb se mohou zapsat pomocí korelací:

$$\rho(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \frac{\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)}{\sqrt{\text{var}(\varepsilon_i) \cdot \text{var}(\varepsilon_j)}}; \quad \text{ex.: } \rho(r_{ij}) = \exp\left(-\frac{r_{ij}^2}{2L^2}\right)$$

Délkové měřítko



Korelace chyb předběžného pole určují **prostorové šíření a hlazení informace**: zavádíme pojem **strukturních funkcí**.

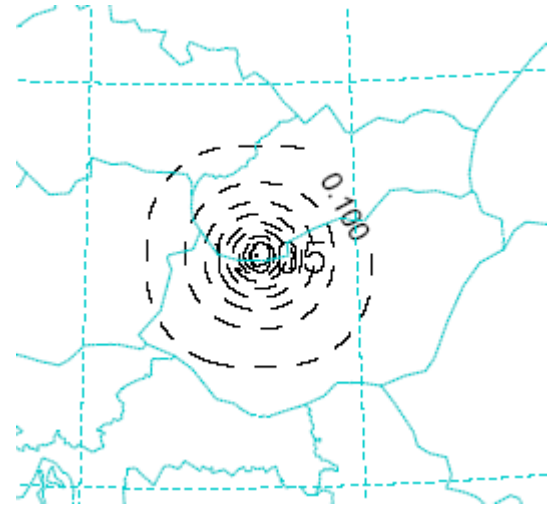
Dobrá demonstrace je případ **jediného pozorování**.



# Role matice **B** - strukturní funkce (2)

Příklad případu jediného pozorování: přírůstky analýzy v poli teploty; ALADIN 3DVAR

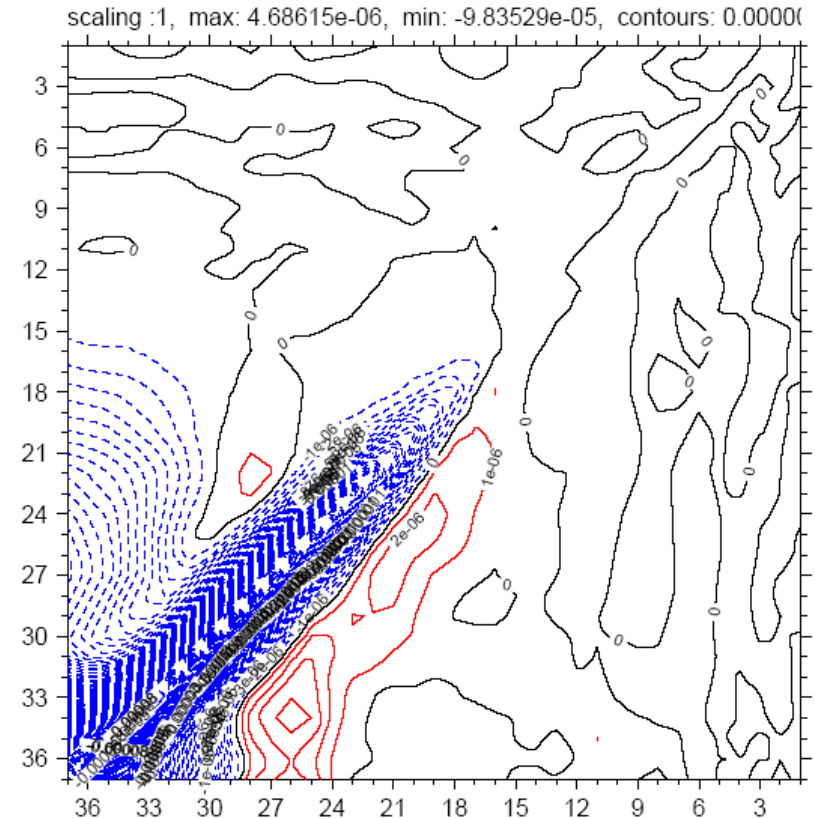
Pro modelování **B** statistik se používají silné hypotézy:  
-isotropie,  
-homogenita.



Typicky jsou statistiky chyb předběžného pole odhadnuty z řad modelových předpovědí: metoda NMC, ansámblová metoda.

# Role matice **B** - strukturní funkce (3)

V multivariantním případě matice **B** obsahuje kovariance chyb mezi meteorologickými parametry (vítr a geopotenciál, vítr a teplota, a tak dále). Tyto kovariance odrážejí základní rovnováhy v atmosféře: hydrostatickou a geostrofickou. Tyto rovnováhy mohou být také explicitně popsány v **B** anebo jsou schovány ve statistických vztazích (lineární regrese).



Příklad statisticky spočtených vertikálních kovariancí chyb (q,T) v modelu ALADIN pro 37 hladin.

# Strukturní funkce závislé na proudění: 4D analýza (1)

Klasicky, matice **B** je počítána jako *statistický soubor krátkých modelových předpovědí*. Je to vlastně *klimatologie chyb modelu*. Typicky je potřeba období 3 měsíců pro získání dat.

**NMC metoda**: rozdíly dvou předpovědí platných ve stejném čase:

$$\varepsilon_i^b = P48_i - P24_i$$

**Nově**: rozdíly ansámblových přepovědí

**Skutečné aktuální strukturní funkce závisí na proudění**. Jejich modelování by se dalo dělat metodou **Kalmanova filtru** (velmi, ale opravdu velmi drahé): zavedeme **chybu modelu** čistým způsobem do systému optimálního odhadu evolucí stavového vektoru během jednoho časového kroku modelu:

$$\mathbf{x}_{i+1}^t = \mathbf{M}_{(i,i+1)} \mathbf{x}_i^t + \boldsymbol{\varepsilon}_i^M$$

chyba modelu

# Strukturní funkce závislé na proudění: 4D analýza (2)

Přijmeme **klasickou hypotézu**: model nemá systematickou chybu. Známe matici kovariancí chyb modelu  $\mathbf{Q}$ , chyby analýzy a modelu nejsou korelovány. Kroky **Kalmanova filtru** v každém kroku  $t_i$  jsou následující:

1. Vypočte se inovační vektor;  $\mathbf{d}_i = (\mathbf{y}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{x}_i^f)$
2. Vypočte se matice „gain“;  $\mathbf{K}_i = \mathbf{P}_i^f \mathbf{H}_i^T (\mathbf{H}_i \mathbf{P}_i^f \mathbf{H}_i^T + \mathbf{R}_i)^{-1}$
3. Určí se analýza;  $\mathbf{x}_i^a = \mathbf{x}_i^f + \mathbf{K}_i \mathbf{d}_i$
4. Proveďte se update kovariancí chyb;  $\mathbf{P}_i^a = \mathbf{P}_i^f - \mathbf{K}_i \mathbf{H}_i^T \mathbf{P}_i^f$
5. Proveďte se krok modelu;  $\mathbf{x}_{i+1}^f = \mathbf{M}_{(i,i+1)} \mathbf{x}_i^a$
6. Spočte se vývoj kovariancí chyb.  $\mathbf{P}_{i+1}^f = \mathbf{M} \mathbf{P}_i^a \mathbf{M}^T + \mathbf{Q}_i$

Ve **4DVAR**, klasická matice **B** je použita na začátku algoritmu minimalizace. Ale **strukturní funkce jsou nesené v čase modelem v průběhu tzv okna asimilace**.

# Analýza: historický vývoj (1)

- První subjektivní analýza – první polovina 19. století
  - Lidé chtěli odvodit zákonitosti atmosféry z map;
  - Věřilo se, že diagnostické mapy pomohou pro předpověď.
  - Vynález **synoptické mapy** (Le Verrier, později Fitzroy); díky bouři v roce 1854.
- **Grafické techniky** (Bjerknes 1911) byly vyvinuty pro odhad komplikovaných z map; to pokračovalo do 1950 (Fjortoft, Saucier).
- Předpověď: hlavně **extrapolační metody**; pouze malé zlepšení v kvalitě předpovědí bylo dosaženo v letech 1860-1950.

# Analýza: historický vývoj (2)

- První objektivní analýza
  - Richardson, 1922: potřeboval určit vítr a tlak na pravidelné síti bodů z nepravidelně rozmístěných pozorování.
  - Další: Charney, Fjortoft, von Neumann, 1950.
  - Nutnost objektivní procedury, dostatečně robustní, bez zásahu lidské ruky.
  - Panofsky (1949): metoda polynomů pro dosažení souhlasu s pozorováními přes malé oblasti jenom s několika uzlovými body.
  - Cressman (1954): Lokální aplikace polynomů.

# Analýza: historický vývoj (3)

- Cressman: zavedení automatické kontroly kvality dat, první použití předběžného pole.
- Bergthorsson a Doos (1955): metoda postupných korekcí – zavedli pojmy jako přírůstky analýzy a pozorování, zavedli předchůdce optimálních vah a statistické interpolační metody.
- V roce 1960 je objektivní analýza operativní skutečností v reálném čase v hlavních předpovědních centrech.

# Optimální interpolace: 1963 – dnes (1)

**Optimální Interpolace** (OI) byla zavedena Gandinem, 1963. Její vylepšené varianty jsou stále používány.

Formulace je velice blízká BLUE odhadu, ale datový operátor (a také chyba reprezentativity) není zaveden.

BLUE je redukována na:

$$\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^b + \mathbf{B}^{xy} \left( \mathbf{B}^{yy} + \mathbf{R} \right)^{-1} \left( \mathbf{y} - \mathbf{x}^{b,o} \right)$$

$\mathbf{B}^{xy}$ : kovariance mezi uzlovými body a body pozorování;

$\mathbf{B}^{yy}$ : kovariance mezi body pozorování;

$\mathbf{x}^{b,o}$ : stavový vektor interpolovaný do bodu pozorování.



# Optimální interpolace: 1963 – dnes (2)

Hlavní problém – inverze matice:  $(\mathbf{B}^{yy} + \mathbf{R})$   
která má obrovskou dimenzi ..  $10^5$ ;

Selekce pozorování je nutným krokem:

- Buďto metodou “boxu” kdy celková oblast je rozdělena na menší kousky staré schéma ECMWF;
- Nebo po uzlových bodech: každý bod je postupně analyzován s okolních pozorování (staré schéma CANARI v ARPEGE/ALADIN).

Omezující hypotézy:

- Nemáme kontinuální reprezentaci atmosféry;
- Předpokládá se existence kontinuálního korelačního modelu pro výpočet kovariancí  $\mathbf{B}$  .

# Variační analýza: polovina 1980 – dnes (1)

**Variační počet** byl zaveden do problému analýzy v polovině 80. let. Funkcionál  $\mathbf{J}$  je definován pro řešení BLUE odhadu nalezením jeho minima. **Metoda adjungovaného operátoru** je použita pro výpočet gradientu  $\mathbf{J}$  (Le Dimet & Talagrand, 1986).

**Další nutné prvky:**

- Rychlý algoritmus minimalizace (konjugovaný gradient);
- Dostatečná vnitřní paměť počítače: problém hledání minima je řešen “globálně” pro celý stavový vektor  $\mathbf{x}$ .

**Výhody:**

- Umožňuje použít velké množství pozorování různých typů;
- Poradí si s velikou dimenzí úlohy, což by jinak nebylo možné;
- Je aditivní: můžeme zavést další členy funkcionálu  $\mathbf{J}$ , jako kontrolu šumu, etc.
- 4D analýza se stává uskutečnitelnou: 4DVAR

# Variační analýza: polovina 1980 – dnes (2)

Funkcionál (3DVAR) je:

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^b)^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) + \frac{1}{2} (\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Ve zkráceném značení:  $J = J_b + J_o$

Můžeme přidat člen kontroly rovnováhy polí  $\mathbf{J}_c$ , jako vzdálenost k vyváženému stavu: ve 4DVAR se používá v  $\mathbf{J}_c$  digitální filtr.

$$\nabla J(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Při výpočtu gradientu máme  $\mathbf{H}^T$ : adjungovaný datový operátor: gradient je nejdříve počítán v “prostoru pozorování” a pak je transformován zpět  $\mathbf{H}^T$  do “prostoru stavového vektoru; nebo kontrolní proměnné”. Matice  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}^T$  zajišťují zobrazení mezi dvěma prostory.

# Variační analýza: polovina 1980 – dnes (3)

**Zobecnění na 4DVAR:**  $\mathbf{J}_b$  je stejné, ale  $\mathbf{J}_o$  je počítáno podle modelové trajektorie vymezené oknem asimilace (například 6 hodin).  
Podél časové osy jsou pozorování sloučena do časových intervalů, typicky po jedné hodině.

$$J_o = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (\mathbf{H}(\mathbf{M}_i(\mathbf{x})) - \mathbf{y}_i)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}(\mathbf{M}_i(\mathbf{x})) - \mathbf{y}_i)$$

Zde  $\mathbf{M}$  je „**TANGENT LINEAR**“ model (linearizovaný model podél trajektorie předpočítané plným modelem v asimilačním okně).

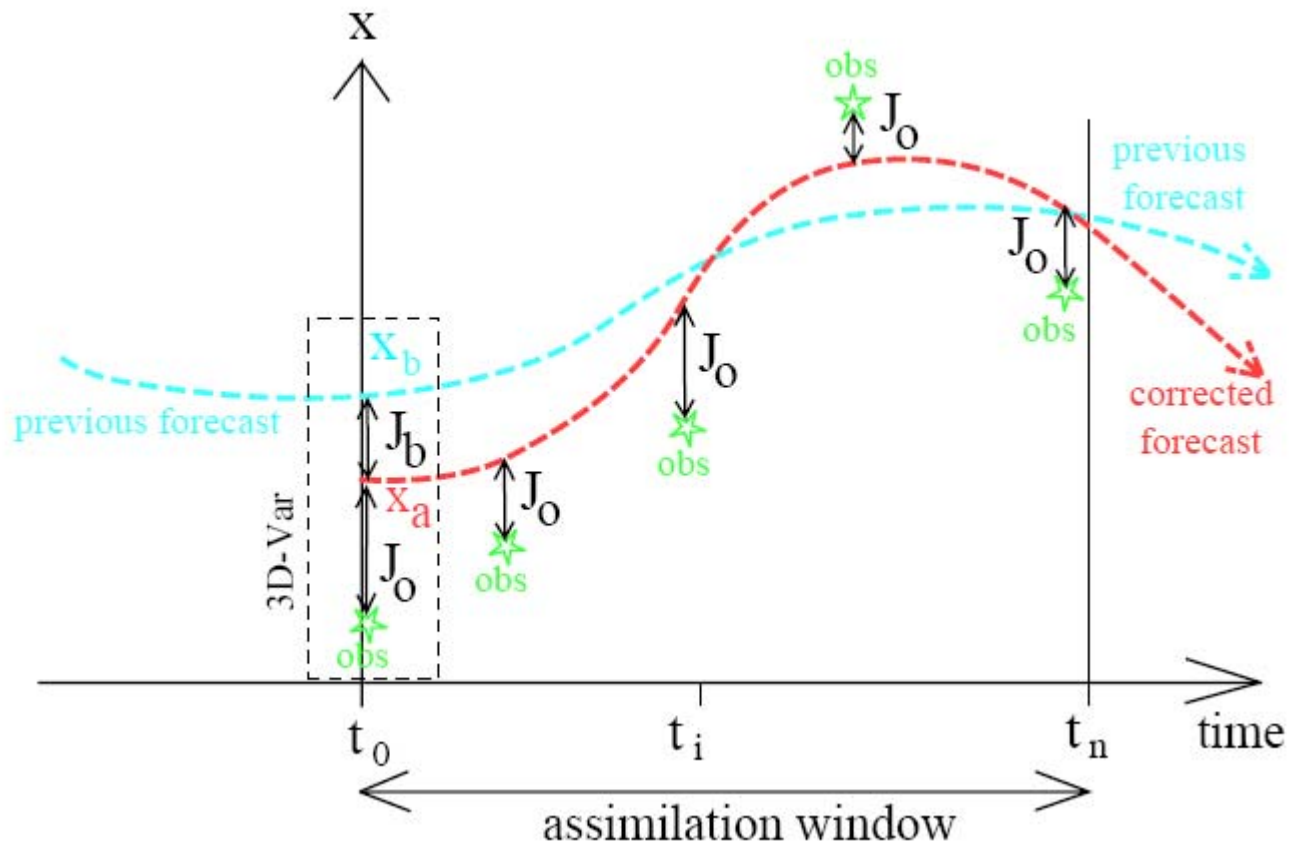
a  $\mathbf{M}^T$  je jeho „**ADJOINT**“ (**adjungovaný operátor**). Tyto operátory nesou kontrolní proměnnou a gradient funkcionálu podél trajektorie:  
**TL vpřed**, **AD vzad**. Výraz pro gradient je:

$$\nabla J(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) + \sum_{i=0}^N \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}(\mathbf{M}_i(\mathbf{x})) - \mathbf{y}_i)$$

# Variační analýza: polovina 1980 – dnes (4)

V praxi používáme metodu přírůstků: funkcionál a jeho gradient jsou vyjádřeny pomocí přírůstků analýzy:

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{x}^a - \mathbf{x}^b$$



# Závěr Lekce L8

- V asimilaci dat řešíme jenom jednu rovnici: BLUE odhad.
- Dá se tak dělat mnohými konkrétními postupy, viz lekce L9 a L10