

L2

Dynamika atmosféry I

Oddělení numerické předpovědi počasí

© ČHMÚ 2007

Plán přednášky

- Dynamika atmosféry
 - Soustava rovnic
 - Zákony zachování
 - Vlny v atmosféře, příklady oscilací
 - Příklady instabilit
 - Rotující souřadný systém
 - Projekce na mapu

Rovnice adiabatických procesů: Eulerovské rovnice

- *Pohybové rovnice* (2. Newtonův zákon o zachování hybnosti: u, v, w)
- *Rovnice kontinuity* (zachování hmoty, ρ)
- *Termodynamická rovnice* (zachování energie, T)
- *Stavová rovnice ideálního plynu*

Zjednodušující hypotézy v dynamice se týkají rovnic v *italice*
Řešení soustavy rovnic je ve tvaru vln, které v atmosféře existují.

Vlny v atmosféře

- **Vlnový pohyb je obecným řešením rovnic.** Tzv. čisté typy vln se dají izolovat zjednodušením soustavy spolu s použitím metody lineárních perturbací. Příslušnou aproximací se tyto vlnové typy dají též **odfiltrovat** (ale většinou se odfiltrují i smíšené typy, tedy více, než by bylo třeba).
- Zvukové vlny
- Gravitační vlny, vnější a vnitřní
- Inerční vlny
- Rossbyho vlny (synoptické)
- Charakteristiky vln:
 - amplituda a fáze; komplexní zápis ve tvaru: $A e^{i\Phi}$
 - fáze je funkcí prostoru a času: fázová rychlost, disperze, ...

Zjednodušené rovnice

- **Quasi-geostrofické přiblížení:**
 - filtruje gravitační vlny; v předpovědních modelech se používalo asi do konce šedesátých let.
- **Hydrostatické přiblížení:**
 - filtruje zvukové vlny; používá se dodnes, i když modely postupně od této aproximace ustupují.
- **Anelastické přiblížení:**
 - filtruje zvukové vlny, ale obsahuje prognostickou rovnici pro vertikální složku větru. V NWP se nepoužívá.
- **Hypotéza tenké vrstvy:**
 - Atmosféra je tenká vrstva ve srovnání s poloměrem Země; např. je zanedbána závislost tíhy s výškou. Používá se dodnes; spolu s hydrostatickou aproximací v tzv. HPE rovnicích (Hydrostatic Primitive Equations).
- Postupný **návrat k Eulerovským rovnicím**; zjednodušené formy rovnic se stále používají při studiu specifických problémů.

Fyzikální **instability** a **oscilace**

- Vysvětlení pomocí **zákonů zachování energie, hybnosti**;
- Jednoduché demonstrace typických oscilací a instabilit ve vertikálním a horizontálním směru (mírné šířky);
- K vysvětlení často stačí **zjednodušený systém rovnic**; není nutné použít plné 3D Eulerovské rovnice.

Vertikální stabilita a oscilace

Suchý vzduch; adiabatický pohyb částice po vertikále. Použijeme **hydrostatické přiblížení** a **termodynamickou rovnici**.

Za těchto podmínek se zachovává tzv. **suchá statická energie** a **potenciální teplota**:

$$s = C_p T + \phi = \textit{konst.}$$

$$d\theta = 0$$

Vertikální profil potenciální teploty určuje typ pohybu:

- 1) θ je s výškou konstantní: pohyb částice je v neutrálním prostředí;
- 2) θ s výškou stoupá: stabilní zvrstvení, částice osciluje;
- 3) θ s výškou klesá: částice stoupá – případ suché instability.

Zrychlení částice při oscilaci:
$$-g \frac{\partial(\ln \theta)}{\partial z} = -N^2$$

N je pulsace, nazývaná jako **Brunt-Väisäläova frekvence** (nepřesně). Typická hodnota N je 0.01 s odpovídající periodou $2\pi/N$ asi 10 minut.

Koncept se dá rozšířit na případ vlhké atmosféry s kondenzací a výparem, ale bez vypadávání srážek: vlhká statická energie (invariant) a Brunt-Väisäläova frekvence.

Inerční stabilita a oscilace (1)

geostrofický vítr; bez horizontálního střihu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - fv = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + fu = 0$$

Geostrofický vítr:

$$u_g = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$v_g = +\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y}$$

dostaneme:

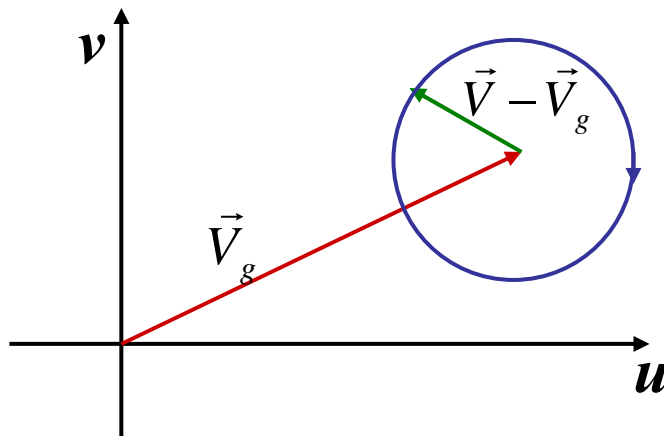
$$\frac{\partial u}{\partial t} + f(v_g - v) = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - f(u_g - u) = 0$$

Můžeme zavést komplexní zápis:

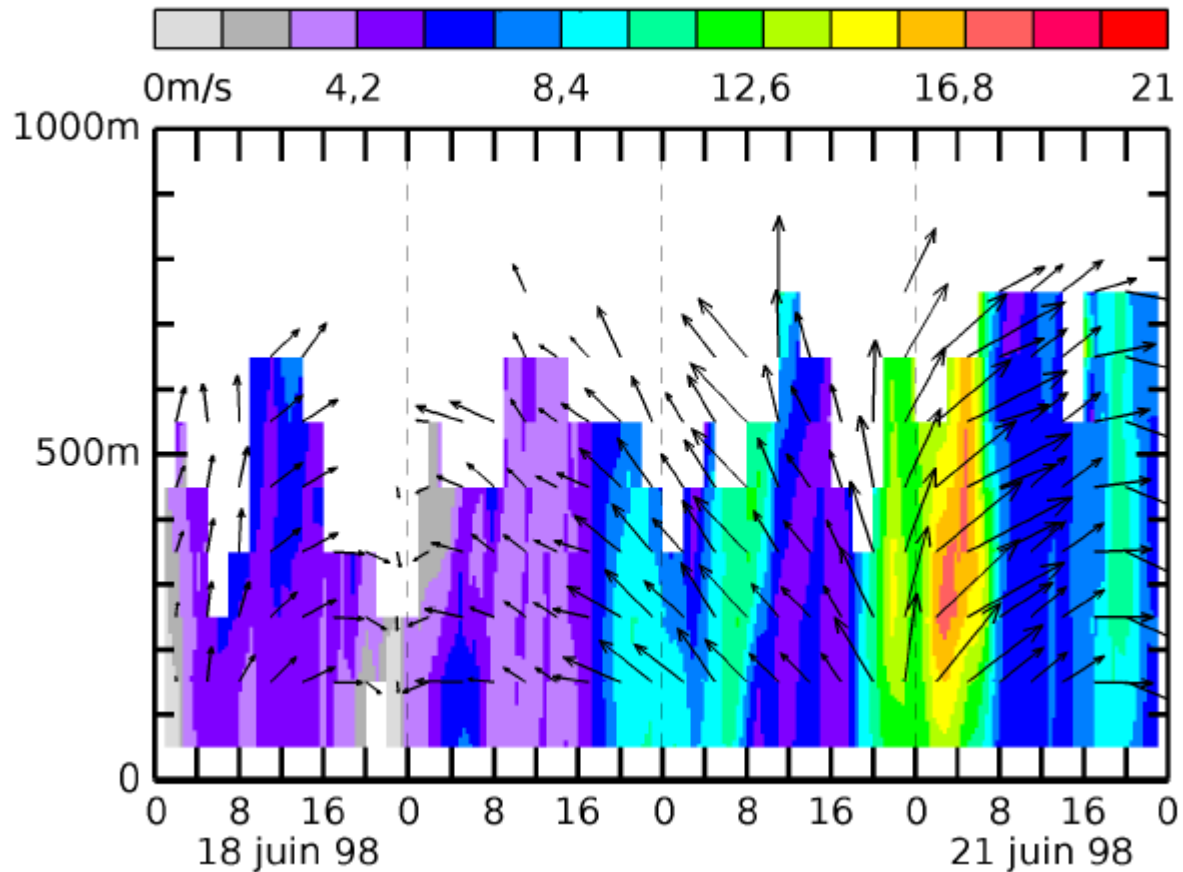
$$w = u + iv \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(w - w_g)}{\partial t} + i f (w - w_g) = 0$$

Vítr rotuje anticyklonálně kolem své geostrofické hodnoty s pulsací f



f hraje v horizontální rovině stejnou roli jako N ve vertikále; jenom zdánlivá síla je tu kolmá ke směru pohybu. Velikost f je typicky 100-krát menší než N v mírných šířkách.

noční jet v nízkých hladinách (1)

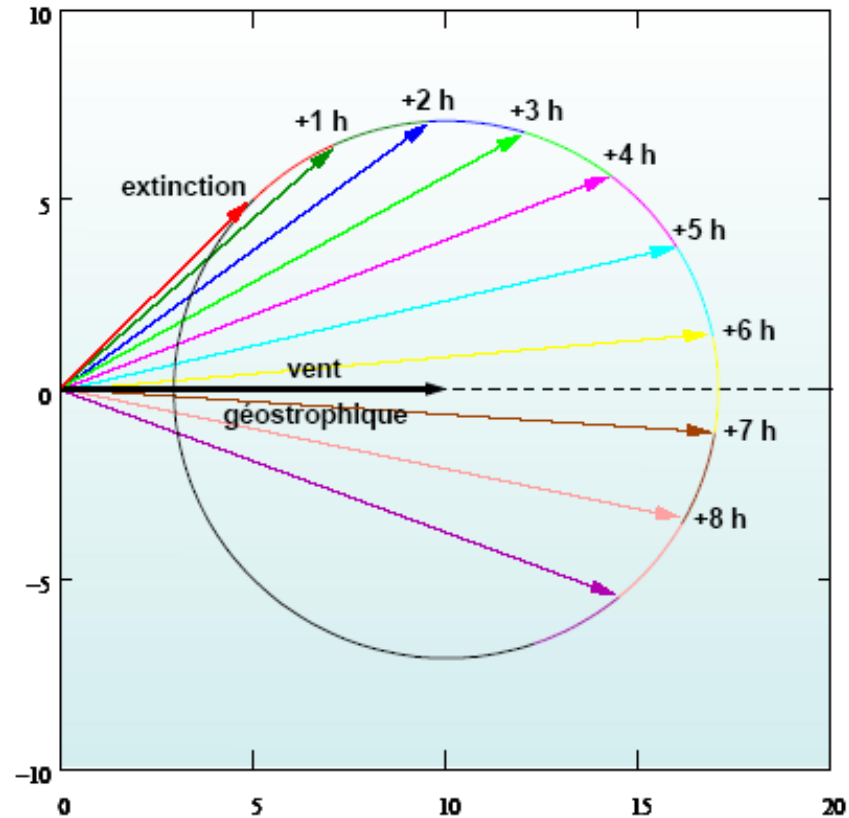


Jev pozorovaný nad rovným terénem a při absenci baroklinní aktivity

noční jet v nízkých hladinách (2)

- Během dne turbulence generovaná denním chodem udržuje vertikální profil větru na Ekmanově spirále, s redukovanou silou ve srovnání s geostrofickým větrem.
- V noci se turbulence ztiší (vyjma v těsné blízkosti povrchu, kde je tření stále aktivní) a vítr se začíná točit podle své inerční oscilace.
- Během své inreční rotace dosáhne rychlosti přesahující sílu geostrofického větru!

noční jet v nízkých hladinách (3)



Večer při ztišení turbulence se výchozí bod nachází na Ekmanově spirále. Hodnota f odpovídá středním šířkám.

Inerční stabilita a oscilace (2)

Zonální geostrofický vítr, mění se v severo-j jižním směru

$$\frac{Du}{Dt} = fv = f \frac{Dy}{Dt}$$

$$\frac{Dv}{Dt} = f(u_g - u)$$

Pohyb částice o δy

máme

$$u(y_0 + \delta y) = u_g(y_0) + f \cdot \delta y$$

$$u_g(y_0 + \delta y) = u_g(y_0) + \frac{\partial u_g}{\partial y} \cdot \delta y$$

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{D^2(\delta y)}{Dt^2} = \ddot{\delta y} = -f \left(f - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) \delta y = -f \frac{\partial M}{\partial y} \delta y$$

kde $M = f \cdot y - u_g$ je tzv. absolutní hybnost

Znaménko f a gradientu M určuje typ horizontálního pohybu:

- 1) $f \cdot dM/dy = 0$: pohyb částice je v neutrálním prostředí;
- 2) $f \cdot dM/dy > 0$: stabilní případ, částice osciluje s pulsací
- 3) $f \cdot dM/dy < 0$: případ inerční instability.

$$\sqrt{f \frac{\partial M}{\partial y}}$$

Gradient $M = f$ (Coriolis) + ζ (relativní vorticity) = **absolutní vorticity**

M hraje v dynamice stejnou roli jako potenciální teplota v termodynamice =>

koncepte potenciální vorticity

Rossbyho vlny

- Coriolisova síla se mění se zeměpisnou šířkou

Zachování absolutní vorticity při pohybu částice v severo-j jižním směru:



$$\xi_a = \xi_r + f$$

Při pohybu na sever stoupne f ; relativní vorticity klesne; při pohybu na jih klesá f , relativní vorticity roste.

Relativní fázová rychlost je záporná: šíření západním směrem. Je úměrná gradientu f .

Fyzikální instability (1)

- **Symetrická instabilita** – typicky se projevuje organizovaným pásem oblačnosti ve vlhkém vzduchu v blízkosti front:
 - Máme podmínky pro statickou (ve vertikále) a inerční (v horizontále) stabilitu: ale i když tyto podmínky jsou individuálně splněny, pohyb je **nestabilní podél šikmých drah**.

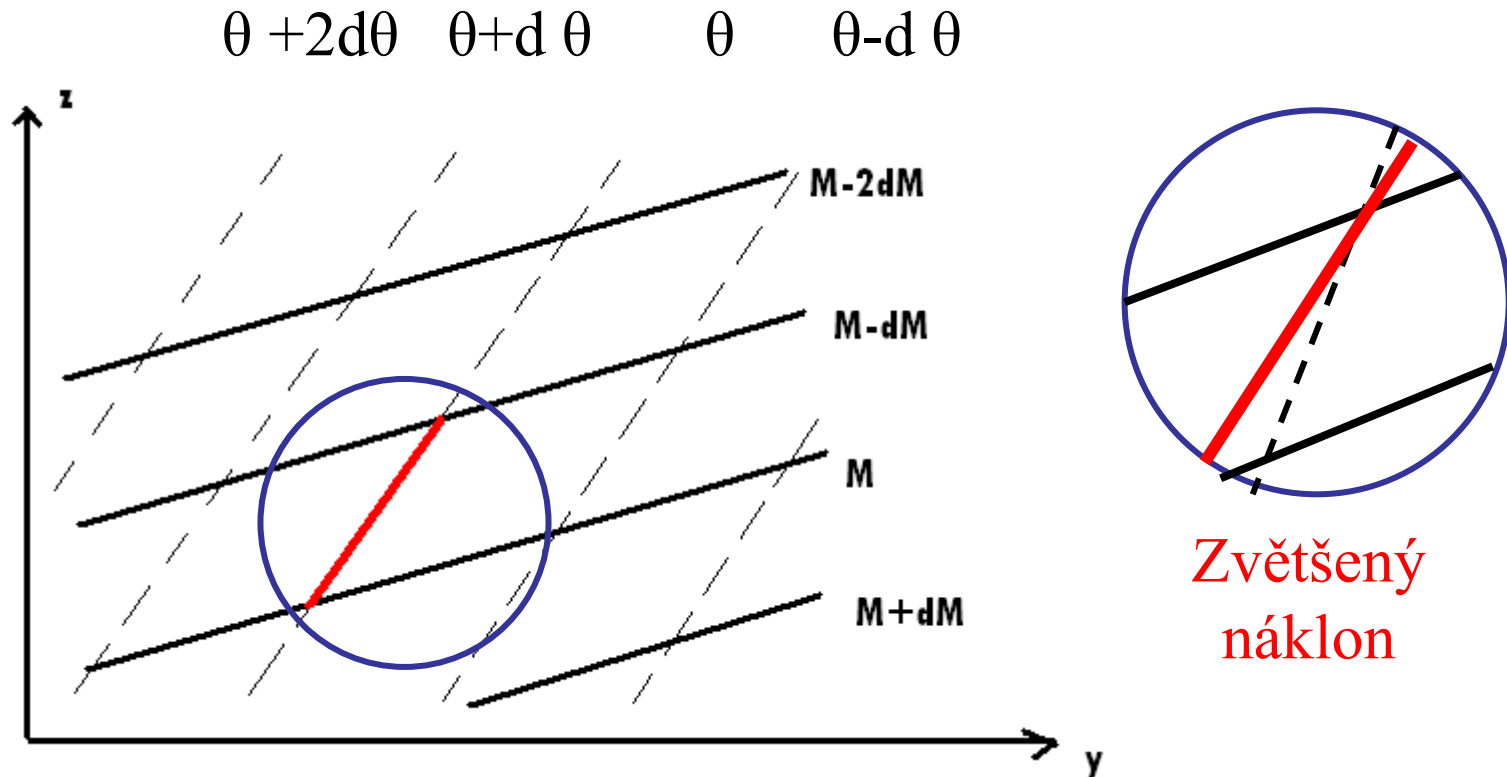
Absolutní zonální hybnost: $M \equiv fy - u_g$

Pokud náklon isentrop je větší než náklon ploch absolutní hybnosti, podmínky symetrické instability jsou splněny:

$$f \left(\frac{\partial M}{\partial y} \right)_\theta < 0$$

(silný stříh větru, teplotní gradient a vlhký vzduch; v suchém vzduchu tato instabilita nikdy nenastane)

Symetrická instabilita: vertikální řez podél poledníku

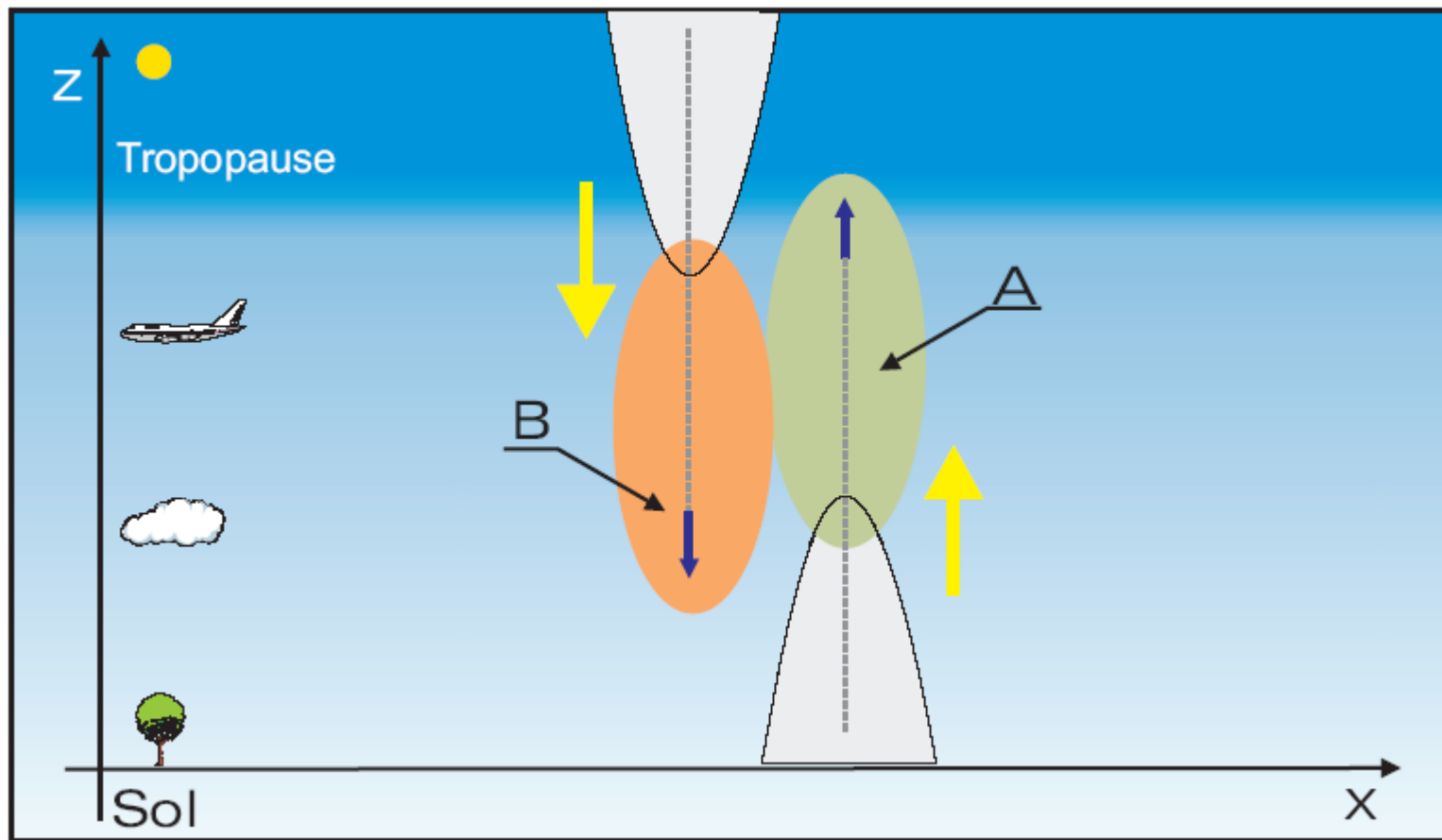


Pohyb částic podél isentrop je nestabilní:
M klesá (a obráceně). Ovšem tyto nestabilní dráhy jsou
v náklonu vůči oběma izočarám, ale jsou blíže k θ izočarám.

Fyzikální instability (2)

- **Baroklinní instabilita** je spojena s vertikálním střihem proudění: roste přeměnou dostupné potenciální energie na kinetickou.
- **Jde o instabilní, rostoucí vlnu**; museli bychom analyzovat módy řídicí soustavy rovnic (metoda částice není dostačující pro jednoduchou demonstraci tohoto jevu).
- Ale je možné vysvětlit **mechanismus instability kvalitativně**, kdy je spuštěn **dvěma Rossbyho vlnami**, které mají určitý **vzájemný fázový posun**.

Baroklinní instabilita



Máme 2 anomálie v poli vorticity, odpovídající 2 Rossbyho vlnám: ve výšce a při zemi. Výšková vlna je posunuta západně. Výstup v zóně A je posílen kladnou anomálií ve výšce; sestup v zóně B je posílen kladnou anomálií při povrchu: máme kladnou zpětnou vazbu.

Eulerovské rovnice v systému rotujících souřadnic

Absolutní souřadná soustava:

$$\frac{d_a \vec{u}_a}{dt} = \vec{F}_g + \vec{F}_p + \vec{F}_v$$

Vnější síly: gravitační přitažlivost, tlak and viskozita

Rotující souřadná soustava je spojena se Zemí: inerční zrychlení

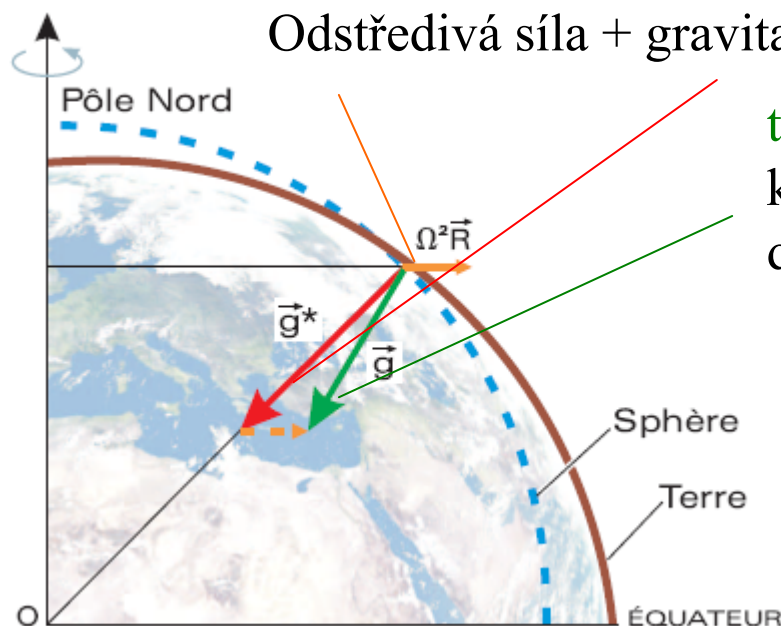
$$\frac{d_a \vec{u}_a}{dt} = \frac{d \vec{u}}{dt} + \underbrace{2\vec{\Omega} \times \vec{u}}_{\text{Coriolisovo zrychlení}} + \underbrace{\vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r}}_{\text{odstředivé zrychlení}} = \vec{F}_g + \vec{F}_p + \vec{F}_v$$

Coriolisovo
zrychlení

odstředivé
zrychlení

Převod na pravou stranu
-> inerční síly:
Coriolisova a odstředivá!

geopotenciál



Odstředivá síla + gravitační přitažlivost =

tíha:

kolmá k povrchu Země:
definice vertikály.

Zavedeme **geopotenciální
plochy Φ**

$$\Phi = g z$$

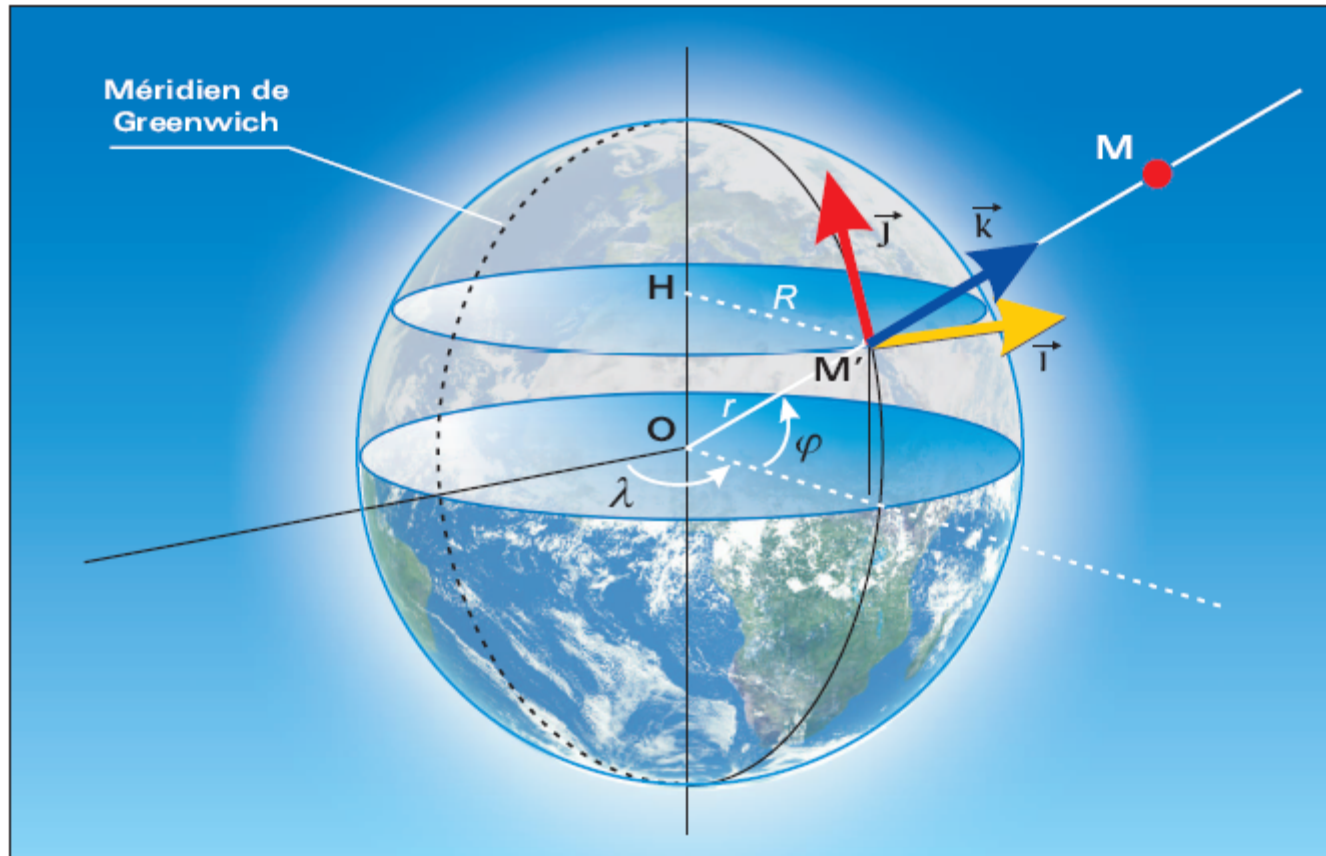
Ale g není konstantní: přitažlivost Země závisí na R , odstředivá síla závisí na R a zeměpisné šířce: nevhodné pro praktické výpočty a měření:

Definice **konstantního g** a **geopotenciální výšky z** tak aby:

$$\Phi = g z$$

Iso- Φ plochy jsou **kulovými plochami**: podstatné zjednodušení výpočtů!

Eulerovské rovnice ve sférických souřadnicích (1)



$$u = r \cos(\varphi) \frac{D\lambda}{Dt}, v = r \frac{D\varphi}{Dt}, w = \frac{Dr}{Dt} = \frac{Dz}{Dt}$$

Eulerovské rovnice ve sférických souřadnicích (2)

$$\frac{Du}{Dt} - \frac{uv \operatorname{tg}(\varphi)}{r} + \frac{uw}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r \cos(\varphi)} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + 2\Omega v \sin(\varphi) - \underline{2\Omega w \cos(\varphi)}$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{uu \operatorname{tg}(\varphi)}{r} + \frac{vw}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - 2\Omega u \sin(\varphi)$$

$$\frac{Dw}{Dt} - \frac{u^2 + v^2}{r} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \underline{2\Omega u \cos(\varphi)}$$

Křivostní
(metrické)
členy

tíha

Síla gradientu tlaku

Coriolisova síla

Sférické souřadnice jsou ortogonální ale NEJSOU kartézské: existence **křivostních členů**

Relativní zrychlení

Hněďě podtržené členy: hypotéza tenké vrstvy

hypotéza tenké vrstvy

Považujeme atmosféru za tenkou vrstvu vzhledem k poloměru Země

$$r = a + z, \quad z \ll a$$

r je v rovnicích nahrazeno a ; vertikální derivace je pak: $\partial / \partial z$

Dopad na **zachování momentu hybnosti a energie**: musíme současně zanedbat některé metrické členy a vertikální členy Coriolisovy síly (není to intuitivní).

axiální složka $\vec{R} \times (\vec{u} + \vec{\Omega} \times \vec{R}) \rightarrow r \cos(\varphi) (u + \Omega r \cos(\varphi))$
se změní na: $a \cos(\varphi) (u + \Omega a \cos(\varphi))$

V rovnici pro zonální složku hybnosti zanedbáme: $-u w / r, -2\Omega w \cos(\varphi)$

Zachování energie: v rovnici pro meridionální složku zanedbáme: $-v w / r$

a v rovnici pro vertikální složku zanedbáme: $(u^2 + v^2) / r, 2\Omega u \cos(\varphi)$

Hydrostatické přiblížení

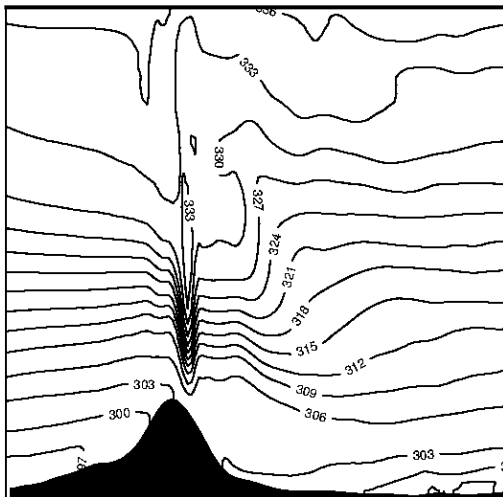
Intuitivní odůvodnění: **vertikální zrychlení** jsou i v bouřkovém mraku malá ($\sim 0.01 \text{ ms}^{-2}$) ve srovnání s g : když jej zanedbáme, dostaneme známý diagnostický vztah:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

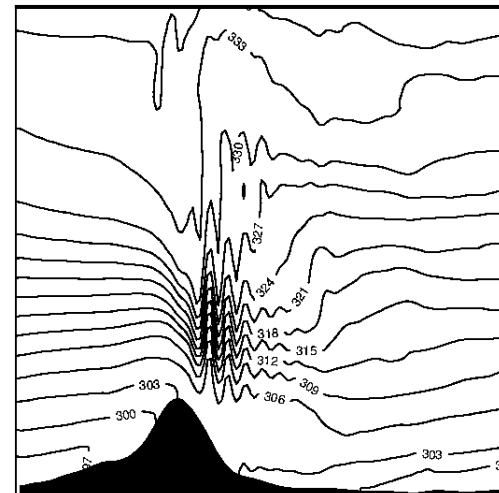
Ale jak skutečně dobrá je tato aproximace?

Jenom dokud měřítko horizontální cirkulace je podstatně větší než měřítko vertikálních pohybů. Srovnejme pulsace f a N . Pro závětrné vlny se například už hydrostatická aproximace nehodí:

HPE



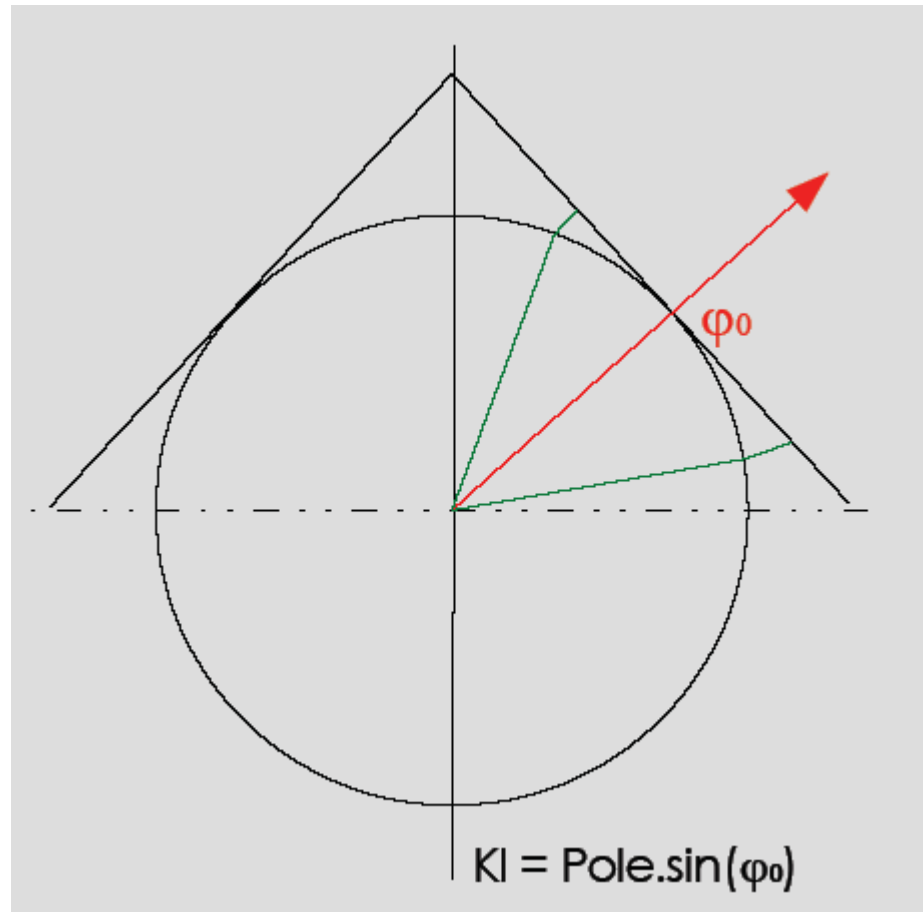
EE



Konformní projekce sféry na mapu

- Motivace: pro relativně malé oblasti, vhodné pro vysoká rozlišení, je přirozené řešit systém rovnic v rovinné geometrii s **horizontálními souřadnicemi (x,y) namísto (λ,φ)** . Mezi oběma páry souřadnic existuje jednoznačný vztah.
- V meteorologii obvykle používáme konformní mapování sféry na rovinu: máme 3 typy projekcí:
 - Polární stereografická (rovinná plocha);
 - Lambertova (kuželová plocha);
 - Mercatorova (válcová plocha).

Příklad Lambertovy projekce



Tečný případ. Lambertova projekce je vhodná pro střední šířky => ALADIN/CE

Eulerovské rovnice „promítnuté“ do roviny mapy (1)

V rovině pracujeme se vzdáleností měřenou v x and y . Reálná vzdálenost je funkcí **faktoru zkreslení mapy**. Osa y mapy je otočena o **úhel ν (x, y)** vůči severu: tomuto úhlu se říká **kompas**.

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \cos \nu & -\sin \nu \\ \sin \nu & \cos \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_s \\ dy_s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} dx_s \\ dy_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \varphi d\lambda \\ a d\varphi \end{pmatrix}$$

Je výhodné definovat (redukovaný) vítr na ‘mapě’: $u' = u / m$

A to z důvodu výpočtu horizontální derivace: $\frac{\partial}{\partial x_s} = m \frac{\partial}{\partial x}$

Takže máme:

$$u' = \frac{\partial}{\partial x} \chi \quad \text{kde } \chi \text{ je rychlostní potenciál}$$

u je ‘fyzický’ vítr v rovině mapy; musí být **otočen** abychom dostali klasické severo-jihní a západovýchodní složky.

Eulerovské rovnice „promítnuté“ do roviny mapy (2)

Eulerovský zápis advekce:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -m^2 u' \frac{\partial u'}{\partial x} - m^2 v' \frac{\partial u'}{\partial y} + m(u'^2 + v'^2) C_u + source; \quad C_u = \frac{\partial m}{\partial x}$$

Advekční členy

Křivostní členy

Lagrangeovský zápis advekce

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x_s} - v \frac{\partial u}{\partial y_s} - uv C_v + v^2 C_u + source; \quad C_v = \frac{\partial m}{\partial y}$$

Lagrangeovská derivace

Pokud jsou inerční zrychlení ošetřena Lagrangeovskou advekcí absolutní hybnosti, křivostní členy zmizí!

$$\vec{u} + \vec{\Omega} \times \vec{R}$$

Závěr lekce L2

- Zákony zachování hybnosti, energie a hmoty jsou základem modelování atmosféry.
- Cílem modelů je pak správně simulovat existující fyzikální instability v atmosféře.